

Двумя способами

Примеры. 1. Каждый посетитель кошачей выставки погладил трёх кошек, при этом каждая кошка была поглажена трижды. Докажите, что число кошек равнялось числу посетителей.

2. По кругу расставлены числа от 1 до 23. Докажите, что сумма некоторых трех подряд стоящих чисел не меньше 36.

1. На рёбрах куба расставили все числа от 1 до 12, а затем для каждой вершины посчитали сумму чисел на трёх ребрах, выходящих из этой вершины. Могут ли восемь полученных чисел оказаться равными?

2. По кругу в непонятном порядке записаны числа $1, 2, \dots, 2020$. Рассматриваем все тройки подряд идущих чисел. 600 из них содержат три нечётных числа, 500 — ровно два нечётных числа. Сколько троек содержат ровно одно нечётное число?

3. Комитет провел 40 заседаний, на каждом было ровно 10 присутствующих. При этом каждые два члена комитета встретились не более чем на одном заседании. Докажите, что в комитете > 60 членов.

4. Однажды в СССР в автобусе без кондуктора ехали 40 пассажиров, имевших при себе только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Всего у пассажиров было 49 монет. Докажите, что пассажиры не могли купить нужное количество билетов и правильно рассчитаться между собой. (Стоимость автобусного билета в СССР составляла 5 копеек.)



5. Докажите, что в клетки шахматной доски нельзя расставить несколько шашек таким образом, чтобы во всех строках и столбцах стояло чётное число шашек, а на всех 26 диагоналях, длина которых больше одной клетки, нечётное.

6. Сколькими способами можно расставить числа ± 1 в таблицу 2021×2021 так, чтобы произведения в каждом столбце и в каждой строке равнялись бы -1 ?

7. Есть кучка из 100 конфет. За ход можно взять какую-то кучку, и разделить её на две кучки из $a > 0$ и $b > 0$ конфет. При этом на доску записывается число $a \cdot b$. Чему будет равна сумма всех выписанных чисел, когда ходы закончатся?

8. Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых двух множеств есть $\{1, 2, \dots, n\}$?

9. Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых трёх множеств есть $\{1, 2, \dots, n\}$?

10. Клетки таблицы 100×100 заполнены натуральными числами от 1 до 100, причем каждое число встречается ровно 100 раз. Докажите, что в некоторой строчке или некотором столбце встречается не менее 10 различных чисел.

Двумя способами

Примеры. 1. Каждый посетитель кошачей выставки погладил трёх кошек, при этом каждая кошка была поглажена трижды. Докажите, что число кошек равнялось числу посетителей.

2. По кругу расставлены числа от 1 до 23. Докажите, что сумма некоторых трех подряд стоящих чисел не меньше 36.

1. На рёбрах куба расставили все числа от 1 до 12, а затем для каждой вершины посчитали сумму чисел на трёх ребрах, выходящих из этой вершины. Могут ли восемь полученных чисел оказаться равными?

2. По кругу в непонятном порядке записаны числа $1, 2, \dots, 2020$. Рассматриваем все тройки подряд идущих чисел. 600 из них содержат три нечётных числа, 500 — ровно два нечётных числа. Сколько троек содержат ровно одно нечётное число?

3. Комитет провел 40 заседаний, на каждом было ровно 10 присутствующих. При этом каждые два члена комитета встретились не более чем на одном заседании. Докажите, что в комитете > 60 членов.

4. Однажды в СССР в автобусе без кондуктора ехали 40 пассажиров, имевших при себе только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Всего у пассажиров было 49 монет. Докажите, что пассажиры не могли купить нужное количество билетов и правильно рассчитаться между собой. (Стоимость автобусного билета в СССР составляла 5 копеек.)



5. Докажите, что в клетки шахматной доски нельзя расставить несколько шашек таким образом, чтобы во всех строках и столбцах стояло чётное число шашек, а на всех 26 диагоналях, длина которых больше одной клетки, нечётное.

6. Сколькими способами можно расставить числа ± 1 в таблицу 2021×2021 так, чтобы произведения в каждом столбце и в каждой строке равнялись бы -1 ?

7. Есть кучка из 100 конфет. За ход можно взять какую-то кучку, и разделить её на две кучки из $a > 0$ и $b > 0$ конфет. При этом на доску записывается число $a \cdot b$. Чему будет равна сумма всех выписанных чисел, когда ходы закончатся?

8. Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых двух множеств есть $\{1, 2, \dots, n\}$?

9. Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых трёх множеств есть $\{1, 2, \dots, n\}$?

10. Клетки таблицы 100×100 заполнены натуральными числами от 1 до 100, причем каждое число встречается ровно 100 раз. Докажите, что в некоторой строчке или некотором столбце встречается не менее 10 различных чисел.